ÉTAPE 1: Identification des variables

TRUC: Les variables à définir sont presque toujours mentionnées dans la question

« Combien d'unités de chacun de ces produits doit-il vendre pour s'assurer un profit maximal? »

On définit le plus précisément possible:

x: Nombre de contenants de 1 litre.

y: Nombre de contenants de 2 litres.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

TRUC: Traiter les phrases une à une

<u>1e phrase:</u>

« Gaston est propriétaire d'un petit verger artisanal où l'on confectionne plusieurs produits maison qui seront vendus aux touristes passant par sa région. »

Cette phrase est la mise en situation, elle ne comporte aucune contrainte.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

2e phrase:

« Son produit vedette est un cidre de pommes qu'il vend en contenants de 1L et de 2L. »

Encore là aucune contrainte, par contre cette phrase peut nous aider à définir nos variables.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

<u>3e phrase:</u>

« En raison d'une grève de ses employés, la compagnie fabriquant les contenants pourra lui fournir au plus 940 contenants, mais pas plus de 720 contenants de 1L. »

Voici nos premières contraintes sur le nombre de contenants disponibles pour notre production. Transformons ces deux contraintes en inéquations.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

« En raison d'une grève de ses employés, la compagnie fabriquant les contenants pourra lui fournir au plus 940 contenants, mais pas plus de 720 contenants de 1L. »

À vous d'essayer! Tentez d'établir la contrainte associée à la phrase bleue et la contrainte associée à la phrase verte.

Lorsque vous aurez terminé, vous pourrez vous corriger avec la diapositive suivante.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d’inéquations dans un graphique

« En raison d’une grève de ses employés, la compagnie fabriquant les contenants pourra lui fournir au plus 940 contenants, mais pas plus de 720 contenants de 1L. »

Réponses:

$$x + y \leq 940$$

$$x \leq 720$$

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

<u>3e phrase:</u>

« Par les années passées, le contenant de 1L était au moins trois fois plus acheté que le format de 2L. »

Voici une troisième contrainte, il faut s'assurer d'être capable de fournir au moins 3 fois plus de formats de 1L que de formats de 2L.

Il s'agit d'une contrainte de proportion entre les deux variables, ce type de contraintes est souvent la bête noire de plusieurs élèves.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

3e phrase:

« Par les années passées, le contenant de 1L était au moins trois fois plus acheté que le format de 2L. »

Tentez d'écrire une inéquation qui représenterait bien mathématiquement cette contrainte, puis passez à la diapositive suivante.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

3e phrase:

« Par les années passées, le contenant de 1L était au moins trois fois plus acheté que le format de 2L. »

VOTRE RÉPONSE EST-ELLE?

$$3x \geq y$$

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

3e phrase:

« Par les années passées, le contenant de 1L était au moins trois fois plus acheté que le format de 2L. »

VOTRE RÉPONSE:

$3x \geq y$ **ERREUR!!!**

VOUS ÊTES TOMBÉ DANS LE PIÈGE!

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

Comment bien procéder pour éviter ce piège:

Il faut se rappeler qu'une inéquation a toujours à la base une frontière qui sépare le plan cartésien en deux demi-plans. Cette frontière est créée par une équation, il faut donc d'abord chercher à établir cette équation en créant l'égalité entre les deux variables.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d’inéquations dans un graphique

« Par les années passées, le contenant de 1L était au moins trois fois plus acheté que le format de 2L. »

Posons x et y de chaque côté d’un égal et demandons-nous laquelle des deux variables doit être multipliée par 3 pour égaler l’autre. Comme les contenants de 2L sont moins achetés, c’est eux qui devront être multipliés par 3 pour égaler le nombre de contenants de 1L vendu. On obtient l’égalité suivante:

$$x = 3y$$

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

« Par les années passées, le contenant de 1L était au moins trois fois plus acheté que le format de 2L. »

$$x = 3y$$

Malgré que nous avons multiplié nos contenants de 2L la contrainte mentionne que les contenants de 1L vont être égaux ou supérieurs au contenant de 2L. On peut donc remplacer le signe d'équation par le signe d'inéquation appropriée.

$$x \geq 3y$$

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

Dans le fond, ce que nous cherchons à écrire sous forme d'inéquation c'est:

« Même si tu triples le nombre de bouteilles de 2L les bouteilles de 1L seront égales ou supérieures à ce nombre »

$$x \geq 3y$$

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

4e phrase:

« Gaston doit par contre produire au moins 170 exemplaires du contenant de 2L pour satisfaire les restaurateurs de la région. »

Tentez d'écrire cette inéquation. Par la suite, vous pourrez vous corriger avec la diapositive suivante.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

4e phrase:

« Gaston doit par contre produire au moins 170 exemplaires du contenant de 2L pour satisfaire les restaurateurs de la région. »

La bonne réponse est:

$$y \geq 170$$

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

<u>5e phrase:</u>

« Cette année, Gaston pense produire un minimum de 1000L de cidre. »

La difficulté de cette contrainte est qu'elle n'est pas sur le nombre de contenants, nos variables, mais plutôt sur le nombre de litres produits. Bien entendu, nous ne pouvons définir de nouvelles variables.

Tentez d'établir cette contrainte. (Corrigé $\rightarrow$)

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

« Cette année, Gaston pense produire un minimum de 1000L de cidre. »

La bonne réponse est:

$$x + 2y \geq 1000$$

L'explication de comment déterminer cette contrainte est contenue dans les diapositives suivantes.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d’inéquations dans un graphique

La stratégie réside à utiliser les variables que nous avons déjà définies pour leur faire exprimer un nombre de litres plutôt qu’une quantité de contenants.

Par exemple, si je multiplie le nombre de contenants de 2L par 2 j’obtiendrai le nombre de litres contenus par ces contenants. La même stratégie pourra être utilisée pour les contenants de 1L qui devront être multipliés par leur contenu en litres donc 1.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

Nous obtenons donc:

Nombre de litres contenus dans les contenants de 2L = 2y

Nombre de litres contenus dans les contenants de 1L = 1x

Il maintenant possible d'établir la contrainte sur le volume minimal de cidre qui peut être produit.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

CONTRAINTES:

Volume minimal de cidre qui peut être produit:

$$x + 2y \geq 1000$$

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

<u>6e phrase:</u>

« Sachant que la vente des contenants de 1L lui rapporte 17,95$ et que celle du 2L lui rapporte 33,95$, combien d'unités de chacun de ces produits doit-il vendre pour s'assurer un profit maximal? »

Malgré les informations numériques données par cette phrase, cette dernière ne nous impose pas vraiment des contraintes limitant la production de cidre. Ces informations serviront plus tard à calculer le profit maximum.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

La plupart des contraintes d'un problème d'optimisation sont énoncées dans la description de la situation à optimiser. Il existe par contre des contraintes qui ne seront jamais mentionnées textuellement dans l'énoncé de la situation, mais qui doivent absolument être ajoutées par la personne qui optimise la situation. Il s'agit des <u>contraintes de positivité</u> ou selon d'autres auteurs des <u>contraintes de non-négativité</u>. On applique ces contraintes lorsqu'une variable à optimiser ne peut être négative, donc que sa valeur est ≥ 0.

Exemple : Dans un certain type d'avion, le total des sièges économiques (x) et des sièges de première classe (y) ne peut dépasser 350 sièges. On sait aussi qu'il n'y a pas plus de 50 sièges de première classe.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

Voici les contraintes associées à cet exemple:

$x + y \leq 350$ $y \leq 50$

$x \geq 0$ ***$y \geq 0$***

Les contraintes en caractère gras ne sont pas mentionnées dans le texte de la situation, ce sont les contraintes de positivité. Ces contraintes représentent le fait qu'il est impossible d'avoir un nombre négatif de sièges dans un avion. Ces contraintes permettent de contraindre le problème à une réponse positive ou nulle pour chacune des variables. Elles permettent aussi de circonscrire le problème au premier cadran du plan cartésien lorsque nous représenterons graphiquement les contraintes.

Il n'y a pas toujours de contraintes de positivité. Par exemple, si on cherche à optimiser la température d'un congélateur pour économiser du courant électrique, nous n'aurons pas de contraintes de positivité s'appliquant à la variable température, car une température négative est possible et logique.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

Dans notre problème du cidre de Gaston, nous savons déjà que le nombre de contenants de 2L est supérieur ou égal à 170, il ne sert donc à rien de préciser, par une contrainte de positivité, qu'il doit être supérieur ou égal à zéro.

Sachant qu'il y a au moins trois fois plus de bouteilles de 1L que ces 170 bouteilles de 2L, il n'est donc pas nécessaire d'ajouter une contrainte de positivité qui dit que le nombre de contenants de 1L doit être supérieur à zéro.

ÉTAPE 2: Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique

En résumé, voici donc les contraintes de notre problème présentées sous forme d'inéquations:

$x + y \leq 940$

$x \leq 720$

$x \geq 3y$

$y \geq 170$

$x + 2y \geq 1000$