

# L'OPTIMISATION

## ( MANUEL 2 – VISION 7 )

---

### COURS 1

1- PRÉSENTATION PAR L'ENSEIGNANT DU CHAPITRE DE L'OPTIMISATION

2- PRESENTATION DE LA SAÉ A RÉSOUDRE EN ÉQUIPE ( CD2 )

3- THÉORIE : ÉQUATION ET INÉQUATIONS

Qu'est-ce qu'une équation et une inéquation  
Comment les représenter graphiquement  
Comment les résoudre algébriquement

4- EXERCICES

Mise à jour p.154 nos : 2, 3, 6

**IMPORTANT : Vous avez un premier quizz au prochain cours sur la représentation graphique d'une équation (droite).**

### COURS 2

1- QUIZZ PORTANT SUR LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE ÉQUATION

2- LA MÉTHODE D'OPTIMISATION

Régler une pareille SAÉ par essais et erreurs prendrait plusieurs heures et ne vous assurerait en rien de l'exactitude de votre réponse. Ce chapitre a pour but de vous montrer, étape par étape, une méthode qui permet d'optimiser rapidement une situation à deux variables.

Cette méthode comporte plusieurs étapes à effectuer une à la suite de l'autre. Elle vous permettra de trouver la bonne combinaison de variables, celle qui en tenant compte de vos contraintes, vous assurera un maximum de profits ou vous permettra de minimiser vos coûts d'opération. Voici, en résumé, les huit étapes de cette démarche que vous

apprendrez durant les prochains cours. Présentement, il est normal que vous ne compreniez pas le sens de toutes ces étapes.

### Étapes de la méthode d'optimisation :

- 1) Identifier les deux variables à optimiser
- 2) Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique
- 3) Identifier la zone contenant toutes les possibilités rattachées à votre situation, ce qu'on appelle le polygone de contraintes.
- 4) Trouver les sommets de votre polygone de contraintes, se sont vos minimum ou maximum possible.
- 5) Construire la règle à optimiser
- 6) Tester les sommets du polygone dans la règle à optimiser
- 7) Identifier le sommet qui vous donne la valeur minimum ou maximum donnée par votre règle à optimiser
- 8) Vérifier votre réponse par la droite baladeuse.

Les cinq premiers cours du chapitre t'amèneront à maîtriser graduellement chacune de ces étapes afin que tu puisses réussir tout problème d'optimisation.

### 3- IDENTIFIER LES DEUX VARIABLES À OPTIMISER

Dans cette première étape de la méthode, il s'agit d'identifier les deux variables à optimiser. Généralement, la façon la plus simple de repérer ces deux variables parmi toutes les informations fournies par le problème est de consulter directement la question. Souvent, la question mentionne très clairement les variables du problème qui doivent être optimisées.

Il est important d'être très précis dans la façon d'identifier les variables. Par exemple,  $x$  associé au t-shirt et  $y$  au gilet à manches longues serait une mauvaise identification, car on ne sait pas qu'est-ce qui doit être optimisé en lien avec ces vêtements. S'agit-il de la quantité à produire ou des tailles qui doivent être privilégiées. Une bonne identification pourrait être :

$x$ : nombre de t-shirts fabriqués

$y$ : nombre de gilets à manches longues fabriqués

Dans un problème d'optimisation, il n'y a pas de notions de variables dépendantes et indépendantes, les variables  $x$  et  $y$  peuvent être attribuées à n'importe quel élément à optimiser.

### 4- LA TRADUCTION DES CONTRAINTES EN INÉQUATIONS

Cette étape, la deuxième de la méthode d'optimisation, nous permet de transformer une information textuelle en langage mathématique. Cette **étape est déterminante** dans l'optimisation d'une situation. Si vous n'êtes pas capable de bien traduire les contraintes d'une situation sous forme d'inéquations, il vous sera impossible d'optimiser la situation.

Pour maîtriser cette étape, il est important d'être capable d'associer certaines expressions au signe d'inéquation approprié. L'exercice suivant vous aidera à développer cette habileté.

### Exercice 1 :

Écris sur la ligne le bon symbole d'inéquation ( $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  et  $\leq$ ) entre les variables  $x$  et  $y$  pour les expressions suivantes :

- |                                     |   |               |
|-------------------------------------|---|---------------|
| 1. $x$ est inférieur ou égal à $y$  | → | $x$ _____ $y$ |
| 2. $x$ est supérieur à $y$          | → | $x$ _____ $y$ |
| 3. $x$ est plus petit que $y$       | → | $x$ _____ $y$ |
| 4. $x$ est plus grand ou égal à $y$ | → | $x$ _____ $y$ |
| 5. $x$ n'est pas plus grand que $y$ | → | $x$ _____ $y$ |
| 6. $x$ est au moins égal à $y$      | → | $x$ _____ $y$ |
| 7. $x$ est au minimum $y$           | → | $x$ _____ $y$ |
| 8. $x$ est moins que $y$            | → | $x$ _____ $y$ |
| 9. $x$ est au maximum $y$           | → | $x$ _____ $y$ |
| 10. $x$ n'est pas moins que $y$     | → | $x$ _____ $y$ |
| 11. $x$ est au moins autant que $y$ | → | $x$ _____ $y$ |
| 12. $x$ est au plus égal à $y$      | → | $x$ _____ $y$ |

Le corrigé de cet exercice est disponible à la fin dans ce document de ce cours.

Par expérience, un type de contraintes semble donner plus de difficultés aux élèves que les autres, il s'agit des contraintes utilisant un lien de proportionnalité entre les variables par exemple  $x$  est au moins le double de  $y$  ou  $y$  est au maximum le triple de  $x$ . La section théorique suivante te permettra de contourner cette difficulté et de ne pas tomber dans le piège de multiplier la mauvaise variable.

Exemple :

Frédéric a au moins trois fois plus de disques de musique rock que de disque de musique populaire.

Avant d'aller plus loin dans ce document, écrivez l'inéquation qui peut traduire mathématiquement la phrase précédente en associant la variable  $x$  aux disques rock et la variable  $y$  aux disques populaires.

Avez-vous écrit  $3x > y$ , si c'est le cas, vous êtes tombé dans le piège et vous venez d'introduire une erreur dans votre problème d'optimisation.

Comment ne pas tomber dans le piège ? Rappelez-vous tout simplement que pour représenter une inéquation il faut d'abord représenter une équation. Il vous faut donc créer l'égalité entre les deux variables. Si vous multipliez les disques de rock ( $3x$ ), vous

augmentez leur nombre, comme ils sont déjà supérieurs au disque populaire vous vous éloignez de l'égalité. Par contre, si vous multipliez les disques les moins nombreux, c'est-à-dire les disques populaires, vous augmentez leur nombre pour le rendre égal au nombre de disques de rock.

Donc en résumé :

On crée l'égalité en multipliant la variable associée au plus petit nombre d'objets.

$$x = 3y$$

On remplace le signe d'égalité en plaçant le signe d'inéquation correspondant à l'expression écrite.

Expression : *au moins*      inéquation :  $\geq$

$$\text{Donc : } x \geq 3y$$

## 5- LES CONTRAINTES DE POSITIVITÉ

La plupart des contraintes d'un problème d'optimisation sont énoncées dans la description de la situation à optimiser. Il existe des contraintes qui ne seront jamais mentionnées textuellement dans l'énoncé de la situation, mais qui doivent être ajoutées par la personne qui optimise la situation. Il s'agit des contraintes de positivité ou selon d'autres auteurs des contraintes de non-négativité. On applique ces contraintes lorsqu'une variable à optimiser ne peut être négative, donc que sa valeur est  $\geq 0$ .

Exemple : Dans un certain type d'avion, le total des sièges économiques (x) et des sièges de première classe (y) ne peut dépasser 350 sièges. On sait aussi qu'il n'y a pas plus de 50 sièges de première classe.

Voici les contraintes associées à cette situation :

$$x + y \leq 350$$

$$y \leq 50$$

$$\mathbf{x \geq 0}$$

$$\mathbf{y \geq 0}$$

Les contraintes en caractère gras ne sont pas mentionnées dans le texte de la situation, ce sont les contraintes de positivité. Ces contraintes représentent le fait qu'il est impossible d'avoir un nombre négatif de sièges dans un avion. Ces contraintes permettent de contraindre le problème à une réponse positive ou nulle pour chacune des variables.

Il n'y a pas toujours de contraintes de positivité. Par exemple, si on cherche à optimiser la température d'un congélateur pour économiser du courant électrique, nous n'aurons pas de contraintes de positivité s'appliquant à la variable température, car une température négative est possible et logique.

## 5- EXERCICES

Mise à jour p.166 nos : 10 a), 13 1) et 2), et 15 a) 1)

### Corrigé exercices 1 :

- |                                 |   |            |
|---------------------------------|---|------------|
| 1. x est inférieur ou égal à y  | → | $x \leq y$ |
| 2. x est supérieur à y          | → | $x > y$    |
| 3. x est plus petit que y       | → | $x < y$    |
| 4. x est plus grand ou égal à y | → | $x \geq y$ |
| 5. x n'est pas plus grand que y | → | $x \leq y$ |
| 6. x est au moins égal à y      | → | $x \geq y$ |
| 7. x est au minimum y           | → | $x \geq y$ |
| 8. x est moins que y            | → | $x < y$    |
| 9. x est au maximum y           | → | $x \leq y$ |
| 10. x n'est pas moins que y     | → | $x \geq y$ |
| 11. x est au moins autant que y | → | $x \geq y$ |
| 12. x est au plus égal à y      | → | $x \leq y$ |