

**MATHÉMATIQUE TECHNICO-SCIENCE  
3E ANNÉE DU 2E CYCLE DU SECONDAIRE**

**L'OPTIMISATION  
( MANUEL 2 – VISION 7 )**

---

**COURS 1**

1- PRÉSENTATION PAR L'ENSEIGNANT DU CHAPITRE DE L'OPTIMISATION

2- THÉORIE : ÉQUATION ET INÉQUATIONS

- 1) Qu'est-ce qu'une équation et une inéquation
- 2) Comment les représenter graphiquement
  - Méthode rapide par l'ordonnée à l'origine et le taux de variation
  - Demi-plans ouvert et fermé
- 3) Comment les résoudre algébriquement

Lectures complémentaires:

Demi-plan : P.151 de votre manuel au bas de la page  
Comment représenter graphiquement une inéquation : P.152

3- EXERCICES

Mise à jour p.154 nos : 2, 3, 6

## COURS 2

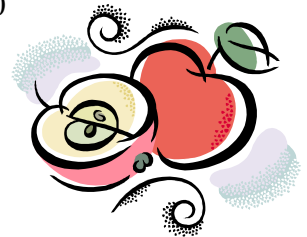
1- PRÉSENTATION DE LA SAÉ À RÉSOUDRE EN ÉQUIPE ( CD2 )

2- PRESENTATION DE LA SITUATION A RÉSOUDRE EN GROUPE

### Le cidre de Gaston



Gaston est propriétaire d'un petit verger artisanal où l'on confectionne plusieurs produits maison qui seront vendus aux touristes passant par sa région. Son produit vedette est un cidre de pommes qu'il vend en contenants de 1L et de 2L. En raison d'une grève de ses employés, la compagnie fabriquant les contenants pourra lui fournir au plus 940 contenants, mais pas plus de 720 contenants de 1L. Par les années passées, le contenant de 1L était au moins trois fois plus acheté que le format de 2L. Gaston doit par contre produire au moins 170 exemplaires du contenant de 2L pour satisfaire les restaurateurs de la région. Cette année, Gaston pense produire un minimum de 1000L de cidre. Sachant que la vente des contenants de 1L lui rapporte 17,95\$ et que celle du 2L lui rapporte 33,95\$, combien d'unités de chacun de ces produits doit-il vendre pour s'assurer un profit maximal?



### 3- LA MÉTHODE D'OPTIMISATION

Résoudre un problème d'optimisation par essais et erreurs prendrait plusieurs heures et ne vous assurerait en rien de l'exactitude de votre réponse. Ce chapitre a pour but de vous montrer, étape par étape, une méthode qui permet d'optimiser rapidement une situation à deux variables.

Cette méthode comporte plusieurs étapes à effectuer une à la suite de l'autre. Elle vous permettra de trouver la bonne combinaison de variables, celle qui en tenant compte de vos contraintes, vous assurera un maximum de profits ou vous permettra de minimiser vos coûts d'opération. Voici, en résumé, les huit étapes de cette démarche que vous apprendrez durant les prochains cours. Présentement, il est normal que vous ne compreniez pas le sens de toutes ces étapes.

### Étapes de la méthode d'optimisation :

- 1) Identifier les deux variables à optimiser
- 2) Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique
- 3) Identifier la zone contenant toutes les possibilités rattachées à votre situation, ce qu'on appelle le polygone de contraintes.
- 4) Trouver les sommets de votre polygone de contraintes, se sont vos minimum ou maximum possibles.
- 5) Construire la règle à optimiser
- 6) Tester les sommets du polygone dans la règle à optimiser
- 7) Identifier le sommet qui vous donne la valeur minimum ou maximum donnée par votre règle à optimiser
- 8) Vérifier votre réponse par la droite baladeuse.

Les cinq premiers cours du chapitre t'amèneront à maîtriser graduellement chacune de ces étapes afin que tu puisses réussir tout problème d'optimisation.

#### 4- IDENTIFIER LES DEUX VARIABLES À OPTIMISER (ÉTAPE 1)

Dans cette première étape de la méthode, il s'agit d'identifier les deux variables à optimiser. Généralement, la façon la plus simple de repérer ces deux variables parmi toutes les informations fournies par le problème est de consulter directement la question. Souvent, la question mentionne très clairement les variables du problème qui doivent être optimisées.

Il est important d'être très précis dans la façon d'identifier les variables. Par exemple,  $x$  associé au t-shirt et  $y$  au gilet à manches longues serait une mauvaise identification, car on ne sait pas qu'est-ce qui doit être optimisé en lien avec ces vêtements. S'agit-il de la quantité à produire ou des tailles qui doivent être privilégiées? Une bonne identification pourrait être :

$x$ : nombre de t-shirts fabriqués

$y$ : nombre de gilets à manches longues fabriqués

Dans un problème d'optimisation, il n'y a pas de notions de variables dépendantes et indépendantes, les variables  $x$  et  $y$  peuvent être attribuées à n'importe quel élément à optimiser.

#### 5- LA TRADUCTION DES CONTRAINTES EN INÉQUATIONS (ÉTAPE 2)

Cette étape, la deuxième de la méthode d'optimisation, nous permet de transformer une information textuelle en langage mathématique. Cette **étape est déterminante** dans l'optimisation d'une situation. Si vous n'êtes pas capable de bien traduire les contraintes d'une situation sous forme d'inéquations, il vous sera impossible d'optimiser la situation.

Pour maîtriser cette étape, il est important d'être capable d'associer certaines expressions au signe d'inéquation approprié. L'exercice suivant vous aidera à développer cette habileté.

### Exercice 1 :

Écris sur la ligne le bon symbole d'inéquation ( $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  et  $\leq$ ) entre les variables  $x$  et  $y$  pour les expressions suivantes :

- |                                     |   |               |
|-------------------------------------|---|---------------|
| 1. $x$ est inférieur ou égal à $y$  | → | $x$ _____ $y$ |
| 2. $x$ est supérieur à $y$          | → | $x$ _____ $y$ |
| 3. $x$ est plus petit que $y$       | → | $x$ _____ $y$ |
| 4. $x$ est plus grand ou égal à $y$ | → | $x$ _____ $y$ |
| 5. $x$ n'est pas plus grand que $y$ | → | $x$ _____ $y$ |
| 6. $x$ est au moins égal à $y$      | → | $x$ _____ $y$ |
| 7. $x$ est au minimum $y$           | → | $x$ _____ $y$ |
| 8. $x$ est moins que $y$            | → | $x$ _____ $y$ |
| 9. $x$ est au maximum $y$           | → | $x$ _____ $y$ |
| 10. $x$ n'est pas moins que $y$     | → | $x$ _____ $y$ |
| 11. $x$ est au moins autant que $y$ | → | $x$ _____ $y$ |
| 12. $x$ est au plus égal à $y$      | → | $x$ _____ $y$ |

Le corrigé de cet exercice est disponible dans ce document à la fin dans de ce cours.

### 6- LIRE LE DIAPORAMA « OPTIMISATION ÉTAPES 1-2 » (CENTRE DES RESSOURCES)

Ce diaporama vous permettra d'établir et de corriger les contraintes du problème « Le cidre de Gaston ».

### 7- EXERCICES

Mise à jour p.166 nos : 10 a), 13 1) et 2)

#### Corrigé exercices 1 :

- |                                     |   |            |
|-------------------------------------|---|------------|
| 1. $x$ est inférieur ou égal à $y$  | → | $x \leq y$ |
| 2. $x$ est supérieur à $y$          | → | $x > y$    |
| 3. $x$ est plus petit que $y$       | → | $x < y$    |
| 4. $x$ est plus grand ou égal à $y$ | → | $x \geq y$ |
| 5. $x$ n'est pas plus grand que $y$ | → | $x \leq y$ |
| 6. $x$ est au moins égal à $y$      | → | $x \geq y$ |
| 7. $x$ est au minimum $y$           | → | $x \geq y$ |
| 8. $x$ est moins que $y$            | → | $x < y$    |
| 9. $x$ est au maximum $y$           | → | $x \leq y$ |
| 10. $x$ n'est pas moins que $y$     | → | $x \geq y$ |
| 11. $x$ est au moins autant que $y$ | → | $x \geq y$ |
| 12. $x$ est au plus égal à $y$      | → | $x \leq y$ |

## COURS 3

### 1- LA NOTATION FONCTIONNELLE D'UNE FONCTION LINÉAIRE

Pour représenter une équation linéaire dans le plan cartésien, elle doit être sous forme fonctionnelle, c'est-à-dire avec son « y » d'isolé. Cette forme nous permet de repérer l'ordonnée à l'origine et le taux de variation de la droite.

Exemple :

$$2x + 4y \leq 12$$

$$4y \leq 12 - 2x$$

$$y \leq \frac{12 - 2x}{4}$$

$$y \leq \frac{12}{4} - \frac{2x}{4}$$

$$y \leq 3 - \frac{x}{2}$$

$$y \leq -\frac{x}{2} + 3$$

Sous cette forme, il est possible de remarquer facilement que l'ordonnée à l'origine est 3 et que le taux de variation est de  $-\frac{1}{2}$

### 3- EXERCICE:

Écris les différentes contraintes du problème «Le cidre de Gaston » sous forme fonctionnelle. Tu pourras te corriger à l'étape suivante de ce plan de travail.

### 4- IDENTIFIER LA ZONE CONTENANT TOUTES LES POSSIBILITÉS RATTACHÉES À VOTRE SITUATION, CE QU'ON APPELLE LE **POLYGONE DE CONTRAINTES**. ( ÉTAPE 3 )

Lire le powerpoint « Optimisation étape 3 » ( Centre des ressources )

Lectures complémentaires :

P.162 et p.163 section Savoirs 7.1

### 5- EXERCICES

Mise au point 7.1 p.164 nos : 2, 6, 10 c), 11, 13\* 3) et 14

\* Le no 13 a déjà été commencé au cours précédent, il s'agit de faire l'étape 3)

## COURS 4

Veillez prendre note que vous aurez un **mini-test** d'environ 10 minutes à votre **prochain cours d'Optimisation**. Ce test porte sur les deux premières étapes de la méthode d'optimisation, soit l'identification des variables et la traduction des contraintes du problème en inéquations.

### 1- DÉTERMINER ALGÈBRIQUEMENT LES SOMMETS DU POLYGONE DE CONTRAINTES ( ÉTAPE 4 )

De toutes les solutions aux problèmes contenues dans le polygone de contraintes, seulement quelques points sont susceptibles de minimiser ou de maximiser la situation. Il s'agit des sommets du polygone de contraintes.

Ces sommets sont des intersections entre deux droites. Lorsque deux droites se croisent, on est en présence d'**un système d'équations à deux variables**. Lorsqu'on résout mathématiquement un système d'équations, la réponse obtenue correspond aux coordonnées du point d'intersection entre ces deux droites.

Il existe trois méthodes différentes permettant de résoudre un système d'équations à deux variables, tu trouveras ces trois méthodes dans la moitié du haut de la page 150 de ton manuel. Assure-toi de bien comprendre ces trois méthodes.

**IMPORTANT** : La méthode de réduction, démontrée à la page 150, ne permet pas que d'éliminer la variable « y » pour trouver en un premier temps la valeur de la variable « x ». Il est possible de choisir d'éliminer la variable « x » pour trouver la valeur de la variable y.

Une page sur le site « allô prof » présente les trois méthodes pour résoudre un système d'équations à deux variables, c'est-à-dire comment déterminer le point d'intersection entre deux droites. Les explications sont appuyées de vidéos. Un incontournable pour ceux qui ont eu un peu de difficultés avec les explications du manuel :

<http://biblio.alloprof.qc.ca/PagesAnonymes/DisplayFiches.aspx?ID=2535#a5>

### 2- TOUVER LES SOMMETS DU POLYGONE DE CONTRAINTES DE NOTRE PRODUCTION DE CIDRE ( EXEMPLE DU COURS 2 )

### 3- EXERCICES

Mise à jour p.154 nos : 1, 4

Mise au point 7.1 p.164 nos : 3 a), b) et d), 13\* 4) , 5) et 6)

\* Le no 13 a déjà été commencé aux cours précédents, il s'agit de le terminer.

Corrigé :

Sommets du polygone de contraintes du problème « Le cidre de Gaston » tels qu'identifiés dans le Powerpoint « Optimisation étape 3 ».

Sommet A : ( 705 , 235 )

Sommet B : ( 720 , 220 )

Sommet C : ( 720 , 170 )

Sommet D : ( 660 , 170 )

Sommet E : ( 600 , 200 )

## **COURS 5**

1- MINI-TEST SUR LES ETAPES 1 ET 2 DE LA METHODE D'OPTIMISATION

2- CONSTRUIRE LA RÈGLE À OPTIMISER ( **ÉTAPE 5** )

Reprenons notre problème du cidre de Gaston et construisons sa règle à optimiser. Comme nous cherchons à optimiser le profit de l'entreprise de Gaston, il faut repérer la ou les phrases du problème qui nous donne(ent) les informations permettant d'établir une équation servant à calculer le profit. Pour notre problème, voici la phrase qui contient les informations dont nous aurons besoins :

*« Sachant que la vente des contenants de 1L lui rapporte 17,95\$ et que celle du 2L lui rapporte 33,95\$, combien d'unités de chacun de ces produits doit-il vendre pour s'assurer un profit maximal? »*

Voici l'équation du profit que nous pouvons construire à partir de cette phrase :

$$P = 17,95x + 33,95y$$

x: Nombre de contenants de 1 litre.

y: Nombre de contenants de 2 litres.

P : Profit (\$)

3- TESTER LES SOMMETS DU POLYGONE DANS LA RÈGLE À OPTIMISER ( **ÉTAPE 6** )

Nous savons que seuls les sommets du polygone de contraintes sont susceptibles d'être un maximum ou un minimum. À cette étape, il suffit donc d'insérer chacun de nos sommets dans la règle objectif afin de découvrir quel sommet maximise l'objectif ou quel sommet minimise l'objectif.

L'utilisation d'un tableau facilite énormément cette démarche et rend la communication très claire. Voici à quoi peut ressembler un tel tableau pour notre problème.

<b>SOMMETS</b>	<b><math>P = 17,95x + 33,95y</math></b>	<b>Profit (\$)</b>
( 705, 235)	$P = 17,95 \cdot 705 + 33,95 \cdot 235$ $P = 12654,75 + 7978,25$	20633,00
(720, 220)	$P = 17,95 \cdot 720 + 33,95 \cdot 220$ $P = 12924,00 + 7469,00$	20393,00
(720, 170)	$P = 17,95 \cdot 720 + 33,95 \cdot 170$ $P = 12924,00 + 5771,50$	18695,50
( 660, 170)	$P = 17,95 \cdot 660 + 33,95 \cdot 170$ $P = 11847,00 + 5771,50$	17618,50
( 600, 200)	$P = 17,95 \cdot 600 + 33,95 \cdot 200$ $P = 10770,00 + 6790,00$	17560,00

#### 4- IDENTIFIER LE SOMMET QUI VOUS DONNE LA VALEUR MINIMUM OU MAXIMUM DONNÉE PAR VOTRE RÈGLE À OPTIMISER ( ÉTAPE 7 )

Le tableau nous montre clairement le profit minimal et le profit maximal, il suffit donc de faire le bon choix selon votre objectif. Dans le cas de notre problème, on doit maximiser les profits, le tableau nous montre clairement que le sommet (705,235) engendre un profit maximal. Il suffit donc de mettre en évidence ce sommet dans le tableau.

<b>SOMMETS</b>	<b><math>P = 17,95x + 33,95y</math></b>	<b>Profit (\$)</b>
( 705, 235)	$P = 17,95 \cdot 705 + 33,95 \cdot 235$ $P = 12654,75 + 7978,25$	20633,00
(720, 220)	$P = 17,95 \cdot 720 + 33,95 \cdot 220$ $P = 12924,00 + 7469,00$	20393,00
(720, 170)	$P = 17,95 \cdot 720 + 33,95 \cdot 170$ $P = 12924,00 + 5771,50$	18695,50
( 660, 170)	$P = 17,95 \cdot 660 + 33,95 \cdot 170$ $P = 11847,00 + 5771,50$	17618,50
( 600, 200)	$P = 17,95 \cdot 600 + 33,95 \cdot 200$ $P = 10770,00 + 6790,00$	17560,00

**Maximum**

Ensuite, il faut formuler notre réponse sous la forme d'un court texte :

« Réponse : Gaston doit produire 705 contenants de 1 litre et 235 contenants de 2L pour atteindre un profit maximal de 20633\$. »

#### 5- EXERCICES

Mise au point 7.2 p.174  
nos : 1, 2,

3 en c) ne pas utiliser les points donnés, mais trouver le vrai minimum et le vrai maximum  
4 a),

7 en b) ne pas évaluer les suggestions, mais trouver le revenu maximal.

**8 IMPORTANT** : Comme certains sommets sont des nombres décimaux, ce qui est impossible dans la situation, il faut retracer le polygone de contraintes en prenant les points entiers le plus près des sommets non entiers comme nouveaux sommets.

Corrigé en lien avec les changements aux questions 3 et 7:

3 c) Coût minimum : 192 000\$ pour un mat d'une hauteur de 90m et un rotor de 60m de diamètre.  
Coût maximum : 256 000\$ pour un mat d'une hauteur de 120m et un rotor de 80m de diamètre.

7 b) Revenu maximal: 160938\$ pour la vente de 218750 crayons HB et 68750 crayons 3H

## COURS 6

1- VERIFIER VOTRE RÉPONSE PAR LA DROITE BALADEUSE. (ÉTAPE 8)

THÉORIE PAR L'ENSEIGNANT (DÉMONSTRATION GEOGEBRA)

La droite baladeuse est un autre outil différent du tableau vu au cours précédent pour repérer la valeur minimale ou la valeur maximale d'une situation. Elle est générée à partir de la règle objectif.

Nous nous servirons encore du problème du cidre de Gaston pour découvrir les étapes par lesquelles passer pour utiliser la droite baladeuse :

1) Entrer un produit fictif dans la règle objectif

$$P = 17,95x + 33,95y$$

Choisissons un produit fictif de 10000\$, l'équation devient donc :  $10000 = 17,95x + 33,95y$

Le choix du profit est vraiment arbitraire, toute autre valeur que 10000\$ aurait aussi permis de générer la droite baladeuse.

2) Écrire l'équation obtenue sous **forme fonctionnelle**, c'est-à-dire la forme de l'équation où la variable  $y$  est isolée pour obtenir l'équation de la **droite baladeuse**.

$$17,95x + 33,95y = 10000$$

$$33,95y = 1000 - 17,95x$$

$$y = \frac{1000 - 17,95x}{33,95}$$

$$y = \frac{-17,95}{33,95}x + \frac{1000}{33,95}$$

$$y = -0,5287x + 29,4551$$

- 3) Représenter la droite baladeuse dans votre graphique
- 4) Faites mentalement une transition horizontale de la droite de façon à ce qu'elle soit complètement située à gauche de votre polygone de contraintes. Noter que selon la valeur du profit que vous avez choisi, il se peut que votre droite soit déjà dans cette position.
- 5) SCANNER LE POLYGONE DE CONTRAINTES EN DÉPLACEMENT MENTALEMENT VOTRE DROITE BALADEUSE VERS LA DROITE

En glissant horizontalement votre droite baladeuse vers la droite, elle entrera successivement en contact avec tous les sommets de votre polygone de contraintes. Il vous suffit alors de savoir que votre minimum sera le premier sommet touché par la droite baladeuse alors que votre maximum sera le dernier sommet touché par votre droite baladeuse.

**Premier sommet rencontré** par la droite baladeuse, c'est votre **minimum**

**Dernier sommet rencontré** par la droite baladeuse, c'est votre **maximum**

Pour notre problème, on peut observer que le dernier sommet rencontré par la droite baladeuse lors de sa translation horizontale vers la droite est le sommet A ( 705, 235 ) ce qui valide la réponse obtenue par notre tableau.

## 2- EXERCICES

Mise au point 7.3 p.186

nos : 1, 3, 4, 5

## **COURS 7**

1- PRÉSENTATION DE LA GRILLE D'ÉVALUATION

2- PROBLÈMES D'OPTIMISATION

Tu es maintenant prêt à appliquer toutes les étapes successivement afin d'optimiser diverses situations.

Mise au point 7.3 p.186

nos : 9, 10, 11, 12, 14

## **COURS 8**

Travail sur la SAÉ d'équipe : « Encadrement Bozart » ( **ÉVALUATION CD 1** )

## **COURS 9**

**EXAMEN CD2 : Utiliser un raisonnement mathématique**