LA CRÉATION DE FONCTIONS EXPONENTIELLES À PARTIR DE SITUATION CONCRÈTE

Ce fichier te permettra de comprendre comment on peut modéliser une situation concrète par une fonction exponentielle de base ($y=c^x$) ou transformée ($y=ac^{b(x-h)}+k$). Je vous rappelle que pour la fonction de base les paramètres a et b ont une valeur de 1 alors que les paramètres h et k ont des valeurs de 0.

<u>Situation 1</u>

Un homme possède 10$, il l'investit dans une action très profitable qui double à chaque mois durant cinq mois consécutifs. Voici un tableau représentant cette situation :

Mois (n)	Calcul permettant de calculer la valeur de l'action	Valeur de l'action ($)
1	10	10
2	10 x 2	20
3	10 x 2 x 2	40
4	10 x 2 x 2 x 2	80
5	10 x 2 x 2 x 2 x 2	160
6	10 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	320

Il est évident que plus le nombre de mois avance, plus le calcul permettant de déterminer la valeur de l'action est long à écrire et possède un caractère répétitif.

Considérons le dernier calcul du tableau :

$$10 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 320$$

Il est possible de simplifier l'écriture de ce calcul en utilisant une notation exponentielle où chacun des nombres de ce calcul joue un rôle :

10 : valeur initiale (paramètre « a » de la fonction exponentielle)
2 : le nombre qui se répète afin de multiplier la valeur initiale est nommé « base » et est noté « c ».
5 : le nombre de fois que se répète la base est nommé « exposant », c'est la variable indépendante de la fonction exponentielle.
320 : la réponse au calcul impliquant un exposant est nommée « puissance »

On aurait donc pu écrire le calcul sous la forme suivante :

Valeur initiale   Exposant

$$10 \text{ x } 2^{5} = 320$$

Base   Puissance

Valeur initiale x $base^{exposant}$ = puissance

Dans cette situation, si l'individu avait investi un montant initial de 1$ nous aurions été en présence de la fonction exponentielle de base où a=1. Une autre fonction exponentielle de base que nous avons vue est la relation entre le nombre de rectangles définis par les plis sur une feuille de papier en relation avec le nombre de fois que cette feuille a été pliée en deux. En effet, initialement, lorsque la feuille n'a pas encore été pliée, elle définit un seul rectangle, donc a=1.

Reprenons le tableau de la situation précédente afin d'en dégager une règle :

mois (n)	Calcul permettant de calculer la valeur de l'action	Nombre de fois que se répète la base (exposant)	Règle	Valeur de l'action ($)
1	10	0	10×2^0	10
2	10 x 2	1	10×2^1	20
3	10 x 2 x 2	2	10×2^2	40
4	10 x 2 x 2 x 2	3	10×2^3	80
5	10 x 2 x 2 x 2 x 2	4	10×2^4	160
6	10 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	5	10×2^5	320

La consultation de ce tableau nous montre que l'exposant est toujours inférieur d'une unité au nombre de mois. Par exemple, pour le 4^e^ mois l'exposant est 3, pour le 6^e^ mois l'exposant est 5.

À partir du tableau, nous pouvons voir que les puissances forment une suite :

10, 20, 40, 80, 160, 320

Le premier chiffre de la suite est la valeur initiale et est obtenu lorsque l'exposant est zéro.
Le deuxième chiffre de la suite est obtenu lorsque l'exposant est 1.
Le troisième chiffre de la suite est obtenu lorsque l'exposant est 2.

On s'aperçoit rapidement qu'il existe un lien entre la position d'un nombre dans la suite et l'exposant qu'il faut utiliser pour obtenir la valeur de ce nombre. En effet, il faut toujours utiliser un exposant d'une unité inférieure à la position du nombre dans la série. Nous pouvons donc poser que si la position du nombre dans la suite est symbolisée par « n », il faudra utiliser un exposant dont la valeur est « n – 1 » pour calculer la valeur de ce nombre.

Ce qui nous donne comme règle :

$P = ac^{n-1}$ où P = puissance
a = la valeur initiale de la situation ou le paramètre « a » de la fonction.
c = facteur multiplicatif qui se répète ou la base de la fonction
n = la position de la valeur dans une suite exponentielle

Cette règle nous permet de déterminer, n'importe quelle valeur de l'action si elle continuait à doubler. Si par exemple elle doublait jusqu'au 10e mois, nous pourrions connaître la valeur de l'action en effectuant le calcul suivant :

$10 \cdot 2^{(10-1)} = 5120$ $

La règle précédente est surtout utile lorsqu'on travaille avec des suites exponentielles, dans la vie courante on peut simplifier la règle en ne comptant pas les mois, mais plutôt les mois écoulés, car après tout, la multiplication du montant de l'action prend un mois à ce faire.

Si nous procédons de cette façon, lorsque l'individu achète son action à 10$ aucun mois n'est encore écoulé. Lorsqu'un mois sera écoulé, le montant doublera une première fois et ainsi de suite, voici le nouveau tableau de cette situation :

mois **écoulés** (n)	Calcul permettant de calculer la valeur de l'action	Nombre de fois que se répète la base (exposant)	Règle	Valeur de l'action ($)
0	10	0	10×2^0	10
1	10 x 2	1	10×2^1	20
2	10 x 2 x 2	2	10×2^2	40
3	10 x 2 x 2 x 2	3	10×2^3	80
4	10 x 2 x 2 x 2 x 2	4	10×2^4	160
5	10 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	5	10×2^5	320

On s'aperçoit que le nombre de mois écoulés, correspond directement à l'exposant qu'il faut utiliser pour calculer la puissance.

Ce qui nous donne comme règle :

$P = ac^n$ où P = puissance
a = la valeur initiale de la situation ou le paramètre « a » de la fonction.
c = facteur multiplicatif qui se répète ou la base de la fonction
n = le nombre de fois que la valeur initiale a été multipliée

Lors de notre étude de la fonction exponentielle, la puissance sera représentée par la variable « y » et l'exposant par la variable « x » ce qui nous donne comme règle :

$y = ac^x$

Q1. Un individu place un montant de 3500$. Ce montant augmente de 1% à tous les mois. Quelle sera la valeur de son placement au 100e mois?

Rép : 9373,12$ (Pour connaître l'équation associée à ce calcul, voir le corrigé à la fin document)

Q2. Un individu place un montant de 3500$. Ce montant augmente de 1% à tous les mois. Quelle sera la valeur de son placement après que 100 mois se soient écoulés ?

Rép : 9466,65$ (Pour connaître l'équation associée à ce calcul, voir le corrigé à la fin document)

Situation 2

Qu'arriverait-il à la règle précédente si l'action doublait aux sept mois? Pour mieux comprendre la modification qu'il faudrait apporter à la règle, regardons le tableau de cette nouvelle situation :

mois écoulés (n)	Calcul permettant de calculer la valeur de l'action	Nombre de fois que se répète la base (exposant)	Règle	Valeur de l'action ($)
0	10	0	10×2^0	10
7	10 x 2	1	10×2^1	20
14	10 x 2 x 2	2	10×2^2	40
21	10 x 2 x 2 x 2	3	10×2^3	80
28	10 x 2 x 2 x 2 x 2	4	10×2^4	160
35	10 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	5	10×2^5	320

La modification qu'il faut apporter à la règle n'est pas si complexe qu'elle pourrait le sembler, car si nous prenons n = 7 nous devrions avoir un exposant de 1. Il faut donc se demander comment transformer un 7 en 1. Mathématiquement, il suffit de diviser 7 par 7 pour obtenir 1. Regardons si ce changement, soit la division par 7 de « n » fonctionnerait avec les données suivantes. Pour n=14, nous obtenons comme exposant 14÷7 donc 2, ce qui correspond bien à la valeur du tableau. Nous venons ici d'introduire un paramètre « b » à la règle dont la valeur est 1/7. En effet, multiplier par 1/7 revient à ÷7.

Ce qui nous donne comme règle :

$$P = 10 \cdot 2^{\frac{n}{7}}$$

Où de façon générale :

$P = ac^{bn}$ où

P = puissance
a = la valeur initiale de la situation ou le paramètre « a » de la fonction.
c = facteur multiplicatif qui se répète ou la base de la fonction
n = le nombre de fois que la valeur initiale a été multipliée
b = la valeur qui permet d'associer n au bon exposant ou le paramètre « b » de la fonction.

Sous forme de fonction exponentielle cette équation devient :

$$y = ac^{bx}$$

Résumons ce que nous avons appris jusqu'à présent :

Dans une situation concrète, nous reconnaissons la base au fait qu'elle représente un facteur de multiplication qui se répète à plusieurs reprises. Le paramètre *a*, ou valeur initiale, se reconnaît au fait, comme son nom l'indique, que c'est la valeur de départ, lorsqu'aucune multiplication n'a encore eu lieu. Le paramètre *b* est une valeur qui multiplie ou divise (multiplie par une fraction) le *x* de la fonction afin d'obtenir l'exposant désiré. Le *b* sert donc à ajuster l'exposant.

Q3. Dans la situation précédente où l'action de 10$ double aux sept mois, quelle serait la valeur de l'action après 5 ans ?

Rép : 3804.15$ (Pour connaître l'équation associée à ce calcul, voir le corrigé à la fin document)

Situation 3

Imaginons que la personne de la situation précédente aimerait avoir une fonction qui fait le total de toutes ses économies. Sachant, que cette personne a déjà 5000$ qu'elle garde dans son compte courant et qui pour lequel aucun intérêt ne lui est versé.

Il s'agit tout simplement d'additionner ce montant au montant du placement. Comme la règle qui permet de calculer la valeur du placement est $P = ac^{bn}$, nous n'avons qu'à ajouter notre montant fixe à cette règle pour obtenir le total des économies de l'individu :

Ce qui nous donne comme règle :

$$P = 10 \cdot 2^{\frac{n}{7}} + 2500$$

Où de façon générale :

$P = ac^{bn} + k$ où

P = puissance
a = la valeur initiale de la situation ou le paramètre « a » de la fonction.
c = le facteur multiplicatif qui se répète ou la base de la fonction
n = le nombre de fois que la valeur initiale a été multipliée
b = la valeur qui permet d'associer n au bon exposant ou le paramètre « b » de la fonction.
k = une valeur fixe qui s'additionne ou se soustrait. C'est le paramètre k de la fonction.

Sous forme de fonction exponentielle cette équation devient :

$$y = ac^{bx} + k$$

Q4. Quelles seront les économies, après 20 ans, d'un individu qui investit 1000$ dans une action qui double tous les six ans . L'individu possède déjà un montant de 3000$ en banque pour lequel in ne reçoit aucun intérêt?

Rép : 13 079,40$ (Pour connaître l'équation associée à ce calcul, voir le corrigé à la fin document)

À ce stade-ci, nous avons appris comment reconnaître dans une situation concrète la base ainsi que les paramètres a, b et k. Il ne nous reste qu'à comprendre l'utilité du paramètre h lorsqu'on construit une règle exponentielle.

Situation 4

Un individu investit 10$ dans l'achat d'une action. Cette action stagne pendant 8 mois et ne connaît aucune augmentation de valeur. Puis, après cette période, l'action se met à doubler à tous les 6 mois. Quelle règle permettrait de calculer la valeur de l'action à partir du moment? Voici la nouvelle table de valeur représentant cette situation :

mois écoulés (n)	Calcul permettant de calculer la valeur de l'action	Nombre de fois que se répète la base (exposant)	Règle	Valeur de l'action ($)
8	10	0	10×2^0	10
14	10 x 2	1	10×2^1	20
20	10 x 2 x 2	2	10×2^2	40
26	10 x 2 x 2 x 2	3	10×2^3	80
32	10 x 2 x 2 x 2 x 2	4	10×2^4	160
38	10 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	5	10×2^5	320

Le paramètre *h* permet d'introduire ou d'enlever un décalage entre la situation réelle et la situation exponentielle. Dans ce cas-ci, la situation exponentielle commence au temps 8 mois de la situation réelle. Le paramètre *h* combiné au paramètre *b* permettra d'ajuster le nombre de mois écoulés avec l'exposant que l'on veut obtenir.

Prenons par exemple le cas où quand il y a 14 mois d'écoulés l'action n'a doublé qu'une seule fois. Nous devons partir d'une valeur de n=14 pour obtenir un exposant de 1. Si nous enlevons 8 mois à 14 mois, nous aurons le nombre de mois écoulé depuis que l'action se comporte selon un modèle exponentiel. Donc, 14-8 égal 6, c'est-à-dire, que depuis 6 mois l'action suit un modèle exponentiel. L'exposant devait être pour ce cas (n=14) de 1. Il faudra donc diviser 6 par 6, ce qui revient à le multiplier par 1/6, pour obtenir un exposant de 1. Regardons, si notre séquence, -8 puis x1/6, fonctionne pour un autre nombre de mois écoulés. Si nous prenons 38 mois écoulés moins 8 mois de décalage entre la situation réelle et la situation exponentielle, nous obtenons 30 mois. Ce dernier chiffre multiplié par 1/6 nous donne 5, ce qui est bien l'exposant associé au 38^e mois écoulé.

Ce qui nous donne comme règle :

$$P = 10 \cdot 2^{\frac{1}{6}(n-8)} \quad \text{ou} \quad P = 10 \cdot 2^{\frac{(n-8)}{6}}$$

Où de façon générale :

$P = ac^{b(n-h)} + k$ où

P = puissance
a = la valeur initiale de la situation ou le paramètre « a » de la fonction.
c = le facteur multiplicatif qui se répète ou la base de la fonction
n = le nombre de fois que la valeur initiale a été multipliée
b = la valeur qui permet d'associer n au bon exposant ou le paramètre « b » de la fonction.

k = une valeur fixe qui s'additionne ou se soustrait. C'est le paramètre k de la fonction.
h=représente le décalage entre la situation réelle et la situation exponentielle contenue dans la situation réelle

Sous forme de fonction exponentielle cette équation devient :

$$y = ac^{b(x-h)} + k$$

Q5. Quelles seront les économies, après 15 ans, d'un individu qui investit 4000 $ dans une action qui double tous les huit ans après avoir connu deux ans de stagnation ? L'individu possède déjà un montant de 25000$ en banque pour lequel in ne reçoit aucun intérêt ?

Rép : 37337,70$ (Pour connaître l'équation associée à ce calcul, voir le corrigé à la fin document)

Corrigé

Règle des questions contenues dans les différentes situations de ce document

Situation 1 :

Q1.

$P = 3500 \cdot 1.01^{n-1}$ où n=le nombre de mois que le montant est placé et P=la valeur du placement de l'individu

Q2.

$P = 3500 \cdot 1.01^{n}$ où n=le nombre de mois écoulés depuis que le montant est placé et P=la valeur du placement de l'individu

Situation 2 :

Q4.

$P = 10 \cdot 2^{\frac{n}{7}}$ où n=le nombre de mois que le montant est placé et P=la valeur du placement de l'individu

Situation 3 :

$E = 1000 \cdot 2^{\frac{n}{6}} + 3000$ ou n=nombre d'années du placement et E=les économies totales de l'individu

Situation 4 :

Q5.

$E = 4000 \cdot 2^{\frac{n-2}{8}} + 25000$ ou n=nombre d'années du placement et E=les économies totales de l'individu