# Les lois des exposants

## 1^e OBSERVATION

| Exemple 1 | Exemple 1 en préservant la notation exponentielle le plus longtemps possible |
|---|---|
| $2^3 \cdot 2^4 =$<br>$8 \cdot 16 =$<br>$128$ | $2^3 \cdot 2^4 =$<br>$2^{(3+4)} =$<br>$2^7 =$<br>$128$ |

**Il découle de cet exemple la première loi des exposants :**

**1^e loi**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

**Preuve :**

$2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2)$
$2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$
$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7$

## 2^e OBSERVATION

| Exemple 1 | Exemple 1 en préservant la notation exponentielle le plus longtemps possible |
|---|---|
| $3^4 / 3^2 =$<br>$81 / 9 =$<br>$9$ | $3^4 / 3^2 =$<br>$3^{(4-2)} =$<br>$3^2 =$<br>$9$ |

**Il découle de cet exemple la deuxième loi des exposants :**

**2^e loi**

$$a^m / a^n = a^{(m-n)}$$

**Preuve :**

$3^4 = (3*3*3*3)$
$3^2 = (3*3)$

$$\frac{3\cdot 3\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\cdot \cancel{3}} = 3\cdot 3 = 3^2$$

**3^e OBSERVATION**

| Exemple 1 | Exemple 1 en préservant la notation exponentielle le plus longtemps possible |
|---|---|
| **$2^{-3}$ = 0,125** | $2^{-3} =$<br>$\frac{1}{2^3} =$<br>$\frac{1}{8} =$<br>$0{,}125$ |

**Il découle de cet exemple la troisième loi des exposants :**

**3^e loi**

**$a^{-n} = 1 / a^n$**

**Preuve :**

$3^{-2} =$

$3^{0-2} =$ ( L'ajout du zéro ne change rien au résultat, mais permet l'utilisation de la 2^e loi )

$\frac{3^0}{3^2} =$ ( $3^0 = 1$ )

$\frac{1}{3^2}$

## $4^e$ OBSERVATION

| Exemple 1 | **Exemple 1** en préservant la notation exponentielle le plus longtemps possible |
|---|---|
| $(2^2)^3 =$<br>$4^3 =$<br>$64$ | $(2^2)^3 =$<br>$2^{(2\cdot 3)} =$<br>$2^6 =$<br>$64$ |

**Il découle de cet exemple la quatrième loi des exposants :**

**$4^e$ loi**

$$(a^m)^n = a^{(m\cdot n)}$$

**<u>Preuve :</u>**

$(2^2) = (2\cdot2)$
$(2^2)^3 = (2^2)\cdot(2^2)\cdot(2^2)$
$(2^2)^3 = (2\cdot2)\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot2)$
$(2\cdot2)\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot2) = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$
$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^6$

## $5^e$ OBSERVATION

| Exemples |
|---|
| $2^0 = 1$<br>$6^0 = 1$<br>$10^0 = 1$ |

**Il découle de cet exemple la cinquième loi des exposants :**

**$5^e$ loi**

$$a^0 = 1$$

Un fichier est disponible sur le centre des ressources pour mieux comprendre la provenance de cette loi.

## $6^e$ OBSERVATION

| Exemple 1 | Exemple 1 en préservant la notation exponentielle le plus longtemps possible |
|---|---|
| $(3 \cdot 4)^2 =$<br>$(12)^2 =$<br>$144$ | $(3 \cdot 4)^2 =$<br>$3^2 \cdot 4^2 =$<br>$9 \cdot 16 =$<br>$144$ |

**Il découle de cet exemple la sixième loi des exposants :**

**$6^e$ loi**

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

**<u>Preuve :</u>**

$(3 \cdot 4)^2 = (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4)$

$(3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$ La présence des parenthèses n'est pas nécessaire.

$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$ Les nombres impliqués dans une multiplication peuvent être permutés sans changer le résultat de cette dernière.

$3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 3^2 \cdot 4^2$

## $7^e$ OBSERVATION

| Exemple 1 | Exemple 1 en préservant la notation exponentielle le plus longtemps possible |
|---|---|
| $4^{3/2} = 8$ | $4^{\frac{3}{2}} =$<br>$\sqrt[2]{4^3} =$<br>$\sqrt[2]{64} =$<br>$8$ |

**Il découle de cet exemple la septième loi des exposants :**

**$7^{e}$ loi**

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

## $8^{e}$ OBSERVATION

| Exemple 1 | Exemple 1 en préservant la notation exponentielle le plus longtemps possible |
|---|---|
| $\sqrt{144} = 12$ | $\sqrt{144} =$ <br> $\sqrt{9 \cdot 16} =$ <br> $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} =$ <br> $3 \cdot 4 =$ <br> $12$ |

**Il découle de cet exemple la huitième loi des exposants :**

**$8^{e}$ loi**

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

**<u>Preuve :</u>**

Nous savons que:
$3 = \sqrt{9}$
$4 = \sqrt{16}$
$12 = \sqrt{144}$

donc
$3 \cdot 4 = 12$
$\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{144}$

## $9^{e}$ OBSERVATION

| **Exemple 1** | **Exemple 1** **en préservant la notation exponentielle le plus longtemps possible** |
|---|---|
| $\sqrt{\frac{4}{9}} = 0,\overline{6}$ | $\sqrt{\frac{4}{9}} =$<br>$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} =$<br>$\frac{2}{3} =$<br>$0,\overline{6}$ |

**Il découle de cet exemple la neuvième loi des exposants :**

**9e loi**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

**<u>Preuve :</u>**

Les lois des exposants précédentes peuvent nous aider à comprendre cette dernière loi :

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}}$$

La 7e loi des exposants nous permet de remplacer la racine carrée par un exposant fractionnaire.

$$\frac{4^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

La 4e loi des exposants nous permet de distribuer l'exposant fractionnaire au numérateur et au dénominateur de la fraction.

$$\frac{4^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

La 7e loi permet de remplacer les exposants fractionnaires par des racines

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

Voici le processus de preuve au long, qui démontre bien que :

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$